

Conjecture de Hadwiger: $k = 6$. II—Réductions de sommets de degré 6 dans les graphes 6- chromatiques contraction-critiques

Jean Mayer

308, Rue du Bouldou, St-Clément la Rivière, F-34980 Saint Gély du Fesc, France

Received 5 November 1990

Revised 2 September 1991

Abstract

Mayer, J., Conjecture de Hadwiger: $k = 6$. II—Réductions de sommets de degré 6 dans les graphes 6-chromatiques contraction-critiques, Discrete Mathematics 101 (1992) 213–222.

Dans un graphe 6-chromatique contraction-critique Γ , le sous-graphe de voisinage d'un sommet de degré 6 contient deux triangles sans sommet commun (types A, B, C, D, E, F) ou est constitué d'une roue W_6 (type J) ou d'une roue W_6 privée de deux rayons consécutifs (type G). On obtient ici la réduction du type J ; puis on montre que le type G est incompatible avec les autres types. Diverses réductions conduisent aux résultats suivants:

- (1) Le sous-graphe de Γ engendré par les sommets de degré 6 est soit une clique d'ordre ≤ 4 , soit un ensemble de sommets du type G isolés les uns des autres.
- (2) Γ contient au moins 20 sommets de degré 7.

In a 6-chromatic contraction-critical graph Γ , the neighbour subgraph of a 6-vertex either contains two vertex-disjoint triangles (types A, B, C, D, E, F), or is constituted of a wheel W_6 (type J) or of a wheel W_6 with two consecutive spokes missing (type G). Here the reduction of type J is first obtained; then it is shown that the type G is incompatible with the other types. Various reductions lead to the following results:

- (1) The subgraph of Γ induced by the 6-vertices is either a clique or order ≤ 4 , or a set of mutually isolated vertices of type G .
- (2) Γ contains at least 20 vertices of degree 7.

1. Introduction

Les notions de base concernant les graphes et leurs coloriations sont exposées dans [2] et résumées dans [4]. Nous considérons ici les graphes 6-chromatiques contraction-critiques (ou 'graphes 6-c.c.'): ce sont des graphes simples dont le coloriage nécessite 6 couleurs, mais tels que tout graphe obtenu par contraction d'un graphe 6-c.c. Γ est colorable avec 5 couleurs. Il est évident que K_6 répond à

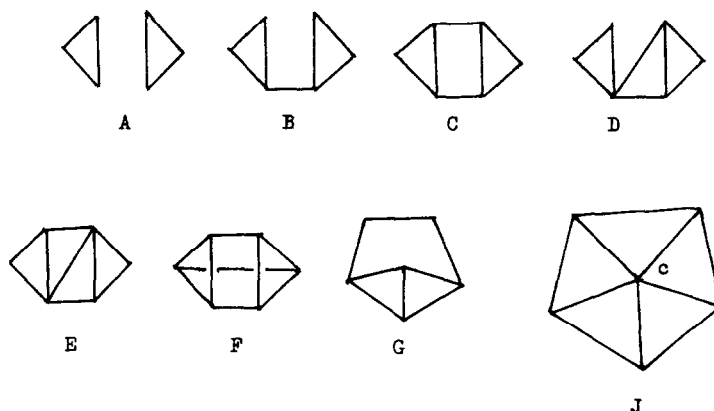


Fig. 1.

la définition; le problème posé est de savoir s'il existe des graphes 6-c.c. non isomorphes à K_6 ; selon la conjecture de Hadwiger, il n'en existe pas. Dans tout ce qui suit, nous supposons $\Gamma \neq K_6$ (Γ est supposé être un contre-exemple de la conjecture).

Dirac [3] a montré que le degré minimum de Γ était ≥ 6 , et que, si Γ contenait des sommets de degré 6 (ou ' v_6 '), le sous-graphe de voisinage d'un v_6 incluait soit deux triangles sans sommet commun, soit un sous-graphe $K_4 - e$ (clique K_4 privée d'une arête). Dans [4], nous avons précisé la nature de ce sous-graphe de voisinage, qui peut présenter l'un des huit types de la Fig. 1.

Dans la Section 2, nous rappellerons les théorèmes et les propriétés de Γ dont nous aurons à nous servir. La Section 3 présentera diverses réductions relatives aux v_6 . Pour terminer, nous montrerons (Section 4) que Γ doit comporter au moins 20 sommets de degré 7.

Les notations utilisées sont les notations classiques (voir [4]); rappelons que $\Gamma > G$ signifie: Γ peut être (ou est effectivement) contracté en G ; $\Gamma \not> G$ signifie: Γ ne peut pas être contracté en G . Pour décrire une contraction, nous noterons la contraction d'un sous-graphe H de Γ en un sommet h par $[H]$, ou par $[H] = h$ si le sommet résultant de la contraction doit être désigné par une lettre.

Dans Γ , $\Gamma(v)$ désigne le sous-graphe de voisinage d'un sommet v , sous-graphe engendré par les sommets voisins de v .

2. Propriétés utilisées dans l'étude de Γ

Théorèmes généraux

(2.1) Théorème de Menger-Dirac. *Dans un graphe m -connexe, deux ensembles de sommets A et B disjoints sont reliés par un ensemble Y d'au moins m chaînes*

deux à deux disjointes (au sens large, c'est-à-dire qu'elles peuvent avoir des extrémités communes). De plus, si A (resp. B) contient au moins m sommets, tout sommet de A (resp. de B) est l'extrémité d'au plus une chaîne de l'ensemble Y .

(2.2) Théorème de densité (Mader). *Si un graphe connexe G ayant p sommets et q arêtes vérifie $p \geq 6$ et $q \geq 4p - 9$, alors $G > K_6$.*

Dans un graphe G , appelons *chaînes transversales croisées* d'un cycle C deux chaînes P_1 et P_2 mutuellement disjointes et n'ayant en commun avec C que leurs extrémités, les extrémités de P_1 séparant celles de P_2 sur C . Nous avons la proposition:

(2.3) *Si un graphe G 4-connexe contient un cycle C , ou bien G est planaire avec C comme 'cycle facial' (frontière d'une face dans une représentation plane de G), ou bien G inclut deux chaînes transversales croisées de C .*

Cette proposition résulte immédiatement du fait que G , étant 4-connexe, est un '2-linked graph' [5].

(2.4) *Tout graphe planaire est 4-colorable [1].*

Propriétés de Γ (Γ étant 6-c.c. et non isomorphe à K_6):

(2.5) (Mader) Γ est 6-connexe.

(2.6) *D'après (2.2) et (2.5), le degré minimum de Γ est 6 ou 7.*

(2.7) *Un sommet de degré $6 \in X(\Gamma)$ a pour sous-graphe de voisinage l'un des graphes de la Fig. 1.*

(2.8) *Si une arête $(a, b) \in E(\Gamma)$ est commune à au moins 4 triangles, tout $K_4 \subset \Gamma$ contient a ou b [4], (3.4).*

(2.9) (a) (Dirac) $\Gamma \not\supset K_5$; (b) (J.M.) $\Gamma \not\supset S_5^{(2)}$; $S_5^{(2)}$ désigne un K_5 avec une arête remplacée par une chaîne de longueur 2.

(2.10) *Un v_6 de type B, C, D, E, F n'a pas de voisin v_6 [4], (3.8).*

Les références précises de ces théorèmes et propriétés sont indiquées dans [4]. Pour la propriété (2.3), voir [5].

3. Réductions concernant les v_6

Nous dirons qu'un v_6 dont le sous-graphe de voisinage est de type A, B, \dots, J est lui-même de type A, B, \dots, J . Deux types sont dits *incompatibles* si la présence d'un sommet de l'un de ces types dans Γ exclut celle d'un sommet de l'autre type. Nous verrons que le type J est réductible, et que les autres types de v_6 s'excluent mutuellement.

(3.1) Γ ne contient pas de sommet du type J .

Preuve. Supposons, au contraire, que Γ contienne un sommet x du type J , c'est-à-dire que $\Gamma(x)$ soit une roue $W_6 = \{c\} \cup C$, c étant le *centre* de la roue W_6 . D'après (2.5), $\Gamma - \{c, x\}$ est 4-connexe. Donc, d'après (2.3), ou bien $\Gamma - \{c, x\}$ est planaire avec C comme frontière d'une face, ou bien il inclut deux chaînes transversales croisées de C . Dans le premier cas, $\Gamma - \{c\}$ est planaire et donc 4-colorable d'après (2.4); une cinquième couleur suffit pour colorier c et Γ est 5-colorable: contradiction.

Si $\Gamma - \{c, x\}$ inclut deux chaînes transversales croisées de C , disons P_1 et P_2 , $\{x, c\} \cup C \cup P_1 \cup P_2$ est une subdivision de K_6 . Donc $\Gamma > K_6$, et il y a encore contradiction. \square

(3.2) Si Γ contient un v_6 dont le sous-graphe de voisinage inclut deux triangles sans sommet commun (types A, B, C, D, E, F), il ne contient aucun v_6 du type G .

Preuve. Supposons la proposition fausse, et soit x_0 un $v_6 \in V(\Gamma)$, tel que $\Gamma(x_0)$ comprenne deux triangles (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) ; supposons de plus que Γ contienne un sommet y_0 de type G , dont les voisins seront désignés comme sur la Fig. 2. D'après (2.8), x_0 et y_0 ne sont pas joints par une arête.

Si nous définissons une chaîne constituée d'un sommet unique comme chaîne de longueur nulle, nous observerons que $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$ sont reliés par six chaînes disjointes. Si $\Gamma(x_0) \cap \Gamma(y_0) = \emptyset$, les six chaînes disjointes existent d'après (2.1) et (2.5). Supposons donc, par exemple, que $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$ aient un sommet s en commun; $\Gamma - \{s\}$ est 5-connexe d'après (2.5), d'où $\Gamma(x_0) - \{s\}$ est relié à $\Gamma(y_0) - \{s\}$ par cinq chaînes deux à deux disjointes et ne contenant pas s , en vertu de (2.1). Nous avons donc six chaînes disjointes reliant $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$, y compris s , chaîne de longueur nulle. Le raisonnement s'étend sans difficulté au cas de plusieurs sommets communs à $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$.

Montrons que les hypothèses ci-dessus entraînent $\Gamma > K_6$. Il y a deux cas (la Fig. 2 correspond au Cas 1):

Cas 1. Les chaînes partant respectivement de y_3 et de y_5 se terminent dans des triangles différents de $\Gamma(x_0)$; nous pouvons poser, par exemple, $P_1 = P_{y_3a_1}$ et $P_2 = P_{y_5b_1}$. Contractons (y_0, y_6) ; contractons $P_1 \cup (y_3, y_5) \cup P_2$ en un sommet, ainsi que les quatre autres chaînes reliant $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$: nous avons $\Gamma > K_6$.

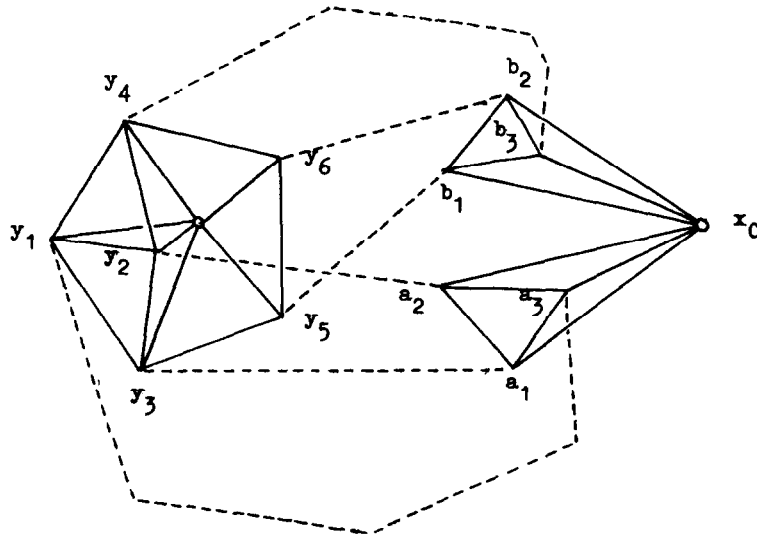


Fig. 2.

Cas 2. Les chaînes partant de y_3 et de y_5 se terminent dans le même triangle de $\Gamma(x_0)$, disons (a_1, a_2, a_3) ; symétriquement, les chaînes partant de y_4 et de y_6 se terminent dans l'autre triangle, à savoir (b_1, b_2, b_3) ; ainsi nous pouvons poser, par exemple, $P_1 = P_{y_3 a_1}$ et $P_2 = P_{y_6 b_1}$. Contractons (y_0, y_4) ; contractons $P_1 \cup (y_5, y_6) \cup P_2$ en un sommet, ainsi que les quatre autres chaînes reliant $\Gamma(x_0)$ et $\Gamma(y_0)$: à nouveau, nous avons $\Gamma > K_6$. \square

(3.3) Si Γ contient deux sommets dont le sous-graphe de voisinage inclut deux triangles sans sommet commun (types A, B, C, D, E, F), ces deux sommets sont joints par une arête.

Preuve. Supposons la proposition fausse; Γ contient deux v_6 , soit v et v' , remplissant la condition indiquée et non joints par une arête. En désignant un triangle par la lettre T (avec possibilité d'indicer T), nous noterons:

$$\Gamma(v) = T_1(a_1, a_2, a_3) \cup T_2(a_4, a_5, a_6),$$

$$\Gamma(v') = T'_1(b_1, b_2, b_3) \cup T'_2(b_4, b_5, b_6).$$

$\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ ne sont pas nécessairement disjoints; mais si Γ contient deux K_4 ayant une arête commune (a, b) , $\Gamma - \{a, b\}$ n'inclut aucune clique K_4 en raison de (2.8); donc (disons) T_1 et T'_1 ne peuvent pas avoir deux sommets communs. Deux triangles appartenant l'un à $\Gamma(v)$, l'autre à $\Gamma(v')$ peuvent donc avoir un ou trois sommets communs. Si $T_1 = T'_1$, T_2 et T'_2 sont disjoints, en raison de (2.9b).

$\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ sont reliés par six chaînes disjointes, en raison de (2.1) et de (2.5); comme dans la proposition précédente, les chaînes de longueur nulle sont

admisses comme telles. Nous pouvons choisir les notations pour que deux chaînes au moins relient T_1 à T'_1 (donc deux chaînes au moins relient T_2 à T'_2). Posons:

$$P_i = P_{a_i b_i} \quad \text{pour } i = 1, 2, 4, 5.$$

Il y a deux cas de figure suivant que $P_3 = P_{a_3 b_3}$ et $P_6 = P_{a_6 b_6}$, ou que $P_3 = P_{a_3 b_6}$ et $P_6 = P_{a_6 b_3}$. Nous commencerons par ce dernier cas.

Cas 1. $P_3 = P_{a_3 b_6}$, $P_6 = P_{a_6 b_3}$ (Fig. 3).

Contracter $[P_1]$, $[P_2]$, $[P_6]$, $[P_5 \cup \{v'\}]$ et $[P_3 \cup (b_6, b_4) \cup P_4]$. Nous obtenons $\Gamma > K_6$.

Discussion. Etant donné que les six chaînes reliant $\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ sont contractées chacune en un sommet dans la contraction ci-dessus, la preuve reste valable si une ou deux d'entre elles sont initialement de longueur nulle. On ne peut avoir $T_i = T'_i$ ($i = 1$ ou 2) dans ce premier cas.

Cas 2. $P_3 = P_{a_3 b_3}$, $P_6 = P_{a_6 b_6}$.

La 6-connexité de Γ entraîne la 4-connexité de $\Gamma - \{v, v'\}$. Donc, par (2.1), il existe au moins quatre chaînes disjointes reliant $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ à $P_4 \cup P_5 \cup P_6$. Ces chaînes sont disjointes au sens strict (sans extrémités confondues) sauf si $\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ ont un triangle en commun. Il y a donc deux sous-cas:

Sous-cas 2 (a). $\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ n'ont pas de triangle en commun (Fig. 4). Parmi les quatre chaînes disjointes considérées, on peut supposer, sans perte de généralité, qu'il y en a deux qui partent de P_3 : appelons-les P_7 et P_8 , et posons $P_7 = P_{x_1 x_2}$, $P_8 = P_{y_1 y_2}$. Les chaînes P_7 et P_8 relient P_3 à P_6 et P_5 respectivement.

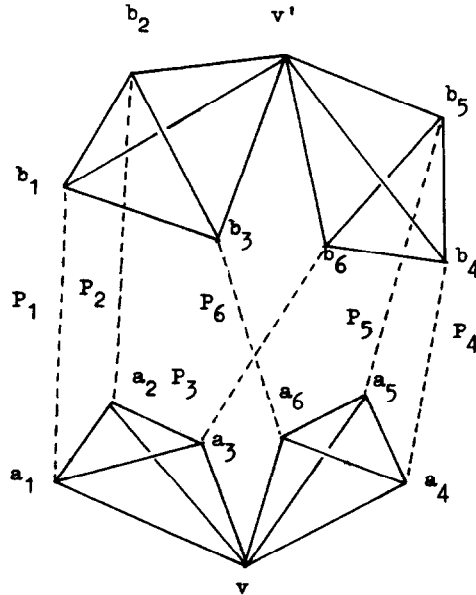


Fig. 3.

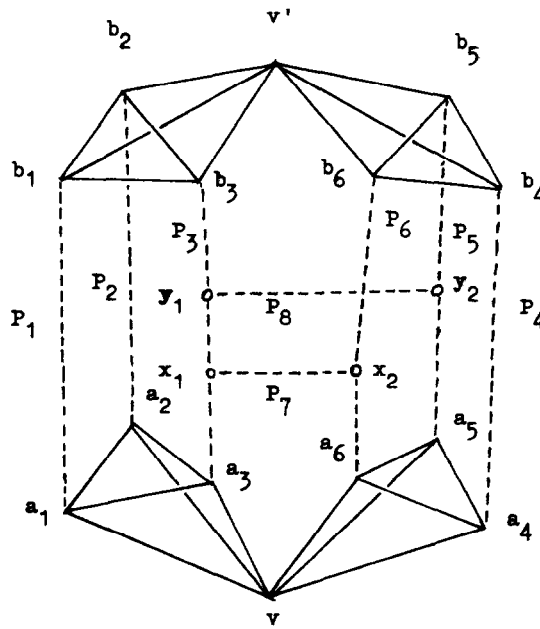


Fig. 4.

Contracter $[P_1]$, $[P_2]$, $[P_4 \cup \{v'\}]$, $[P_5(a_5, y_2) \cup P_8 \cup P_3(y_1, b_3)]$, $[P_3(a_3, x_1) \cup P_7 \cup P_6(x_2, a_6)]$: nous obtenons $\Gamma > K_6$.

Discussion. P_8 est disjointe de P_7 , mais peut avoir une partie commune avec P_6 . Si P_8 a une partie commune avec $P_6(x_2, b_6) - \{x_2\}$, la construction ci-dessus reste valable, puisque la sous-chaîne $P_6(x_2, b_6) - \{x_2\}$ n'est pas utilisée dans l'opération de contraction. Et si P_8 a un sommet, disons y_3 , (ou même une sous-chaîne que l'on contractera en un sommet y_3), en commun avec $P_6(x_2, a_6) - \{x_2\}$, nous pouvons former deux chaînes $P'_3 = P_3(a_3, x_1) \cup P_7 \cup P_6(x_2, b_6)$ et $P'_6 = P_6(a_6, y_3) \cup P_8(y_3, y_1) \cup P_3(y_1, b_3)$ disjointes l'une de l'autre ainsi que de P_1 , P_2 , P_4 , P_5 , ce qui nous ramène au premier cas.

Si toutes les chaînes ayant une extrémité dans P_3 se terminent dans (disons) P_6 sans qu'on puisse les prolonger jusqu'à un sommet de P_4 ou P_5 (ni, symétriquement, de P_2 ou P_3), la contraction indiquée n'est pas possible. Mais, en ce cas, $\{a_3, b_3, a_6, b_6\}$ est un ensemble de sommets séparant Γ , ce qui contredit (2.5).

Sous-cas 2 (b). $\Gamma(v)$ et $\Gamma(v')$ ont un triangle en commun, disons $T_2 = T'_2 = T(c_1, c_2, c_3)$ (Fig. 5).

$\Gamma - \{v, v'\}$ étant 4-connexe, on trouvera une des chaînes P_1, P_2, P_3 , disons P_3 , reliée par deux chaînes (disjointes l'une de l'autre ainsi que de P_1, P_2) à $\{c_1, c_2, c_3\}$. Soit $P' = P(y_1, c_2)$ et $P'' = P(y_2, c_3)$ ces deux chaînes. Contractons $[P_1]$, $[P_2]$, $[P' \cup P_3(y_1, b_3)]$, $[P'' \cup P_3(y_2, a_3)]$, ainsi que l'arête (c_1, v') . Nous obtenons $\Gamma > K_6$.

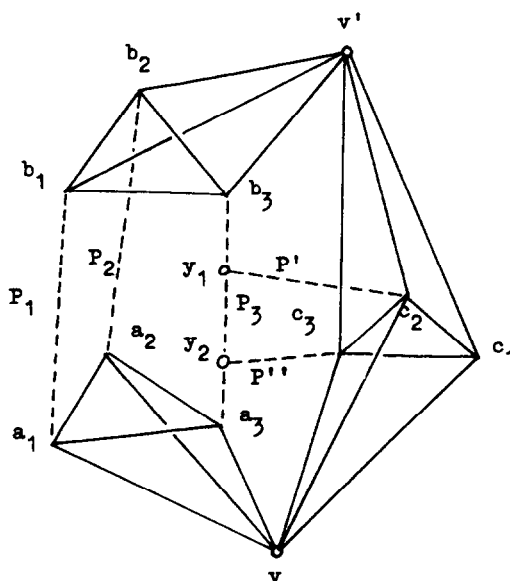


Fig. 5.

Ainsi, dans chaque cas, nous avons une contraction de Γ en K_6 , contrairement à la définition de Γ . Ceci termine la preuve de (3.3). \square

(3.4) Si Γ contient des v_6 du type A, il en contient au plus 4, et ceux-ci forment une clique. Si Γ contient un v_6 de type B, C, D, E ou F, il ne contient pas d'autre v_6 .

Preuve. Dans Γ , une paire de v_6 dont le sous-graphe de voisinage contient deux triangles sans sommet commun (comme c'est le cas de tous les types cités) est jointe par une arête, d'après (3.3). Les sommets de type A forment donc une clique et, comme $\Gamma \not\cong K_5$, d'après (2.9a), l'ordre de cette clique est ≤ 4 . Si Γ contient un sommet v_6 de type A, B, C, D, E ou F, il ne peut contenir aucun v_6 du type G, en raison de (3.2); donc les v_6 de Γ doivent former une clique, d'après (3.3); mais, d'après (2.10), un v_6 de type B, C, D, E ou F ne peut pas avoir de voisin v_6 . Donc un v_6 de l'un de ces types est unique dans Γ . \square

En résumé, les v_6 de Γ peuvent former les sous-graphes suivants:

- (1) Une clique de sommets de type A, d'ordre ≤ 4 .
- (2) un sommet unique de type B, C, D, E ou F;
- (3) des sommets de type G. Pour ce dernier cas, il a été prouvé dans [4] que Γ contient soit une clique K_2 de v_6 , soit un nombre indéterminé de v_6 mutuellement non voisins.

4. Présence de v_7 dans Γ

D'après les résultats de la section précédente, on peut montrer que Γ comporte au moins 20 sommets de degré 7.

Pour tout graphe $G(p, q)$ de p sommets et q arêtes, désignons la quantité $m = 4p - q$ comme le *déficit* de G ; d'après (2.2), si $p \geq 6$ et $m \leq 9$, $G > K_6$. Donc, selon la définition de Γ , non seulement le déficit de Γ , mais celui de tous les graphes qui en sont déduits par une contraction et ont au moins six sommets, doit être ≥ 10 .

Dans Γ , si nous désignons par p le nombre des sommets, par q celui des arêtes et par p_i celui des sommets de degré i , nous avons:

$$p = \sum p_i, \quad 2q = \sum ip_i, \quad i \geq 6 \quad (p_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 5).$$

$$q = 4p - m \quad (\text{par la définition de } m).$$

Un calcul classique et très simple donne:

$$2p_6 + p_7 = 2m + \sum_{i \geq 9} (i - 8)p_i. \quad (1)$$

Si dans Γ on contracte une arête commune à r triangles, on obtient un graphe Γ' dont le déficit $m' = m + r - 3$. Si pour une arête (a, b) on a $r \leq 2$, on aura $m' \leq m$; (a, b) sera appelée *arête positive* de Γ . Tout v_6 est incident à au moins deux arêtes positives, excepté si c'est un sommet du type F , auquel cas Γ ne contient pas d'autre v_6 .

(4.1) Γ comporte au moins 20 sommets de degré 7.

Preuve. Si Γ ne contient aucun v_6 , $m \geq 10$ donne, avec [1], $p_7 \geq 2m \geq 20$. Si Γ ne comporte pas plus de deux v_6 , de quelque type qu'ils soient (excepté le type F), on contractera une arête positive incidente à chaque v_6 ; on voit facilement que, dans chaque cas, on peut contracter ces deux arêtes simultanément et obtenir un graphe Γ' tel que $m' = m - p_6$ ($p_6 = 1$ ou 2). Par [1], on a $p_7 \geq 2(m - p_6) = 2m'$. Or, Γ' étant un contracté de Γ , $m' \geq 10$. Donc $p_7 \geq 20$. Le type F sera traité à la fin de la démonstration.

Si Γ comporte 3 ou 4 sommets de type A , ceux-ci font partie d'une clique K_4 dont toutes les arêtes sont positives: contractons ce K_4 en un sommet; nous obtenons, à partir de $\Gamma(p, q)$, un graphe $\Gamma''(p - 3, q - 6)$; donc $m'' = 4p - 12 - q + 6 = m - 6$. D'où, puisque $m'' \geq 10$, $m \geq 16$. On a $p_7 \geq 32 - 2p_6 > 20$.

Si Γ comporte des v_6 de type G isolés, ceux-ci sont au nombre de p_6 , en raison de (3.2). Chacun de ces v_6 est incident à deux arêtes positives. Si l'on contracte une arête positive incidente à un v_6 donné, les arêtes incidentes aux autres v_6 et qui étaient initialement positives le demeurent: on peut donc contracter autant d'arêtes positives qu'il y a de v_6 dans Γ ; on obtient par là un graphe Γ''' qui vérifie

$m''' = m - p_6$. D'où, puisque $m''' \geq 10$, $m = m''' + p_6$ donne $p_7 \geq 2(m - p_6) \geq 20$.

Si enfin Γ contient un v_6 du type F , d'après (2.10), $p_6 = 1$. Par [1], on a $p_7 \geq 18$. Mais on peut montrer que $p_7 \geq 20$ en contractant une arête positive de Γ de la façon suivante:

Soit w un v_7 de Γ , et soit $\Gamma(w)$ le sous-graphe de Γ engendré par les sommets voisins de w . $\Gamma(w)$ ayant 7 sommets comporte au moins un sommet de degré pair (dans $\Gamma(w)$), soit y . Si y et w ont 4 ou 6 voisins communs, la réduction (2.8) s'applique et l'on a une contraction de Γ en K_6 , ce qui est impossible, Γ étant 6-c.c. Donc w et y ont 0 ou 2 voisins communs et l'arête (w, y) est positive. La contraction de cette arête positive donne un graphe Γ^{iv} tel que $m^{iv} \leq m - 1$. Comme $m^{iv} \geq 10$, $m \geq 11$ et $p_7 \geq 2(m - p_6) \geq 20$. \square

En fait, on peut montrer que Γ ne contient pas de sommet de type F : ceci sera fait dans une étude ultérieure.

La proposition précédente nous montre, en particulier, que le véritable problème, dans le cas $k = 6$ de la conjecture de Hadwiger, est celui des sommets de degré 7.

Références

- [1] K.I. Appel et W. Haken, Every Planar Map is Four Colorable, Contemp. Math. 98 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1989).
- [2] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Paris, Dunod, 1973).
- [3] G.A. Dirac, On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs, J. Reine Angew. Math. 214 (1964) 43–52.
- [4] J. Mayer, Hadwiger's conjecture ($k = 6$): neighbour configurations of 6-vertices in contraction-critical graphs, Discrete Math. 74 (1989) 137–148.
- [5] C. Thomassen, 2-linked graphs, European J. Combin 1 (1980) 371–378.